Analyse des difficultés liées à la résolution des équations du second degré dans C par les élèves de 6ème année des humanités Scientifiques à Kisangani

Par l'Assistant

BUSHIRI IGWANDEY Mathieu

De l'Institut Supérieur Pédagogique d'UBUNDU en sigle ISP-UBUNDU

RESUME

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un nouvel ensemble à dégoter par les élèves finalistes des humanités scientifiques et assimilés dès la rentrée scolaire. La résolution des équations du second degré à coefficient (surtout) complexes posent de multiples difficultés à ces élèves habitués à opérer dans le corps $\mathbb{R}$ des réels depuis l'école primaire. Ces équations dont le discriminant est bien souvent un nombre complexe (avec parties réelles et imaginaires) font appel à la résolution d'une autre équation du second degré, dite équations binômes dont les racines de l'équation complète du second degré.

Une étude menée auprès de 247 élèves finalistes des écoles de la ville de Kisangani a révélé que 173 élèves (soit 69,8%) ne maitrisent pas la résolution des équations du second degré dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Le non maitrise des coefficients (complexes) de l'équation complète, le calcul de discriminant avec les puissances de i (imaginaire), le procédé de résolution de l'équation binôme (en passant aussi par le système d'équations symétriques) sont parmi les variables pour résoudre de telles équations.

INTRODUCTION

0.1. ETAT DE LA QUESTION

L'enseignement et l'apprentissage des nombres complexes préoccupent plus d'un chercheur en didactique des mathématiques.

OHOMA KONGA Baudouin (2007), dans son mémoire de licence sur Analyse des difficultés rencontrées par les élèves de sixième année des humanités scientifiques sur les opérations dans le corps des nombres complexes" dans la ville de Kisangani, constate que la non maitrise des opérations dans le corps des nombres complexes est à la base des difficultés des élèves et propose aux élèves de s'approprier les opérations dans le corps des nombres complexes en faisant beaucoup d'exercices en équipe.

WUNGU EMBONDO (2006), dans son mémoire de licence intitulé Apprentissage de l'enseignement des écritures complexes des isométries usuelles" une étude menée dans les classes de 6ème des humanités scientifiques et techniques dans la ville de Kisangani ; montre que les difficultés d'apprentissage sur les écritures complexes des isométries usuelles sont dues à la non maîtrise des nombres complexes en général et en particulier de calcul de module, de la détermination d'argument, de la forme exponentielle et à l'ignorance complète de la nature et des éléments caractéristiques des applications définies par leurs écritures complexes. Il propose la production des manuels appropriés sur les écritures complexes des isométries usuelles et l'élaboration des contenus didactiques y relatives.

MARIO MAIR Cohen (2012), dans son article sur Nombres complexes et isométries de $\mathbb{R}^2$" applique les nombres complexes à la géométrie des transformations ponctuelles de $\mathbb{R}^2$. Il détermine les équations du groupe des isométries dé plan à partir de l'existence et de la nature de leurs points fixes. Il montre ensuite le rôle important de la réflexion comme génératrice de ces isométries en consolidant le développement à l'aide d'exemples.

De la lecture des ces études antérieures, les auteurs ont abordé différemment l'apprentissage des nombres complexes et l'apprentissage de l'enseignement des nombres complexes en géométrie plane.

Quant à notre étude qui reste toujours dans l'apprentissage des nombres complexes, elle se démarque des travaux susmentionnés par le fait qu'elle s'intéresse aux difficultés de résolution des équations du second degré dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Dans les deux cas, on retrouve toujours les équations.

0.2. PROBLEMATIQUE

En R.D.C et partout ailleurs, l'apprentissage des mathématiques à l'école secondaire est largement marqué par celui de différents types des nombres et des calculs sur ces nombres. L'appropriation de chaque catégorie de nombres est également marquée par la compréhension des propriétés et des principes qui permettent de les caractériser et qui peuvent être en continuité ou en rupture avec celles des nombres déjà connus. D'où, des difficultés liées aux différents types des nombres en général et en particulier des nombres complexes et à leur compréhension dans l'apprentissage des mathématiques.

Le programme national des mathématiques (Edition 2005) en RDC prévoit l'enseignement des nombres complexes en 6ème année des humanités scientifiques et techniques. Habitués à travailler dans $\mathbb{R}$ depuis le début de leur scolarité, les élèves, à la fin de leur scolarité s'affrontent à un nouvel ensemble dont $\mathbb{R}$ en est une partie : l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans lequel existe la correspondance sur les opérations algébriques dans $\mathbb{R}$ notamment la résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles les élèves éprouvent des difficultés (surtout si les coefficients de l'équation sont des nombre complexes) dans le cas où le discriminant est, soit un réel négatif, soit un nombre complexe (ici on parle de l'équation binôme). Pour le premier cas on doit faire intervenir le nombre i tel que $i^2=-1$ et pour le second, un procédé de calcul est à suivre pour la détermination des racines carrées du discriminant ; ce qui conduira à la détermination des racines de l'équation complète, lequel pourrait encore créer un obstacle (ou un blocage).

De ce qui précède, notre travail est axé sur la préoccupation majeure suivante : les élèves de 6ème année scientifique sont-ils capables de résoudre les équations du second degré dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes ?

A cette question principale s'ajoutent les questions spécifiques suivantes :

- Les élèves de 6ème année scientifique sont-ils capables de résoudre une équation binôme dans $\mathbb{C}$?
  Autrement dit, les élèves sont-ils capables de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe ?
- Les élèves de 6ème année scientifique sont-ils capables de déterminer les racines d'une équation complète du second degré dans $\mathbb{C}$?
  Ce sont là les questions auxquelles notre étude tente de donner les réponses.

0.3. HYPOTHESES DU TRAVAIL

En partant de la réflexion posée à la problématique de notre étude, nos hypothèses se formulent de la manière suivante :

- Lès élèves de 6ème année scientifique seraient capables de résoudre une équation binôme dans $\mathbb{C}$;
- Autrement dit, les élèves seraient capables de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe,
- Les élèves de 6ème année scientifique seraient capables de déterminer les racines d'une équation complète du second degré dans $\mathbb{C}$.

0.4. OBJECTIFS DU TRAVAIL

Référence faite à notre problématique, l'objectif principal assigné à notre recherche est la vérification de la capacité des élèves de 6ème année scientifique à résoudre les équations du second degré dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et les objectifs spécifiques sont les suivants :

- Vérifier la capacité des élèves de 6ème année scientifique à résoudre une équation binôme dans l'ensemble $\mathbb{C}$;
  Autrement dit vérifier la capacité des élèves à déterminer les racines carrées d'un nombre complexe
- Vérifier la capacité des élèves de 6ème année scientifique à déterminer les racines d'une équation complète du second degré dans $\mathbb{C}$.

0.5. DELIMITATION DU SUJET

Le programme national de mathématique (Edition 2005) dans notre pays la RDC prévoit l’enseignement des nombres complexes en dernière année de scolarité dans les humanités scientifiques et techniques.

Les nombres complexes sont donc enseignés pour la première fois en l’ensemble $\mathbb{R}$ est une partie de l’ensemble $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$).

La classe de sixième secondaire dans la ville de Kisangani constitue notre champ de recherche. Cette recherche s’effectue pendant l’année scolaire 2015-2016.

GENERALITES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

1.2.1. Historique

Les noms complexes sont apparus suite aux travaux des mathématiciens italiens, notamment TARTAGLIA et CARDAN (1545), qui cherchaient à exprimer les solutions des équations de degrés 3 et 4 à l'aide de formules rationnelles avec radicaux formées à partir des coefficients. L'appellation de nombre imaginaires dut introduite par René DESCARTES en 1637.

John WALLIS, en 1685, a été le premier à représenter les nombres réels sur l'axe des x et les nombres imaginaires sur l'axe des y. presque un siècle plus tard.

Gaspard WESSEL publiera un autre article de représentation des nombres complexes par des points, mais il sera moins remarqué entre temps, en 1730 ; Abraham de Moivre introduisait sa fameuse formule :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{n} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Peu de temps après, Euler établissait sa propre formule, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

En 1777, Euler introduisait le symbole i pour $\sqrt{-1}$, ce qui simplifia les expressions des calculs.

En 1806, un mathématicien amateur suisse, Jean- Robert Argand, dans son essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques, construisit dans un plan le produit $c = ab$ de deux nombres complexes a et b en imitant la construction géométrique de la multiplication de nombre réels données par Descartes dans son premier livre de géométrie.

Le produit c est définit comme le segment représentant la quatrième proportionnelle de 1, a et B :a est 1 ce que c est à b. il déduisit que la racine carrée de -1 se trouve sur l'axe vertical. Le plan muni de ce produit et de l'addition vectorielle est connu sous le nom de plan Argand.

En 1831, Gauss, qui travaillait avec d'autres mathématiciens sur le théorème fondamental de l'algèbre, introduisit la notation $z = a + ib$ pour représenter un nombre complexe et définir son $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et son conjugué $\bar{z} = a - ib$. Il observera que les opérations d'addition et de multiplication des nombres complexes possèdent les mêmes propriétés algébriques que les opérations usuelles sur les nombres réels, ce qui en fait un corps.

L'acceptation de la théorie des nombres complexes doit beaucoup aussi à Louis- Augustin Cauchy qui développa la théorie des fonctions d'une variable complexe.

1.2.2. Nombres réels et nombres complexes

La construction de l'ensemble Q des rationnels a rendu possibles toutes les opérations arithmétiques : addition, soustraction, multiplication et division. Ainsi, toute équation du premier degré à coefficients rationnels à ses résolutions dans Q.

Par contre, la racine carrée est une opération dont le résultat, qui n'existe si elle est effectuée sur un nombre positif, n'est que rarement un nombre rationnel. Ainsi, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle, ce que démontra Euclide dès le IIIème siècle avant Jésus Christ.

Partout, $\sqrt{2}$ est un nombre dont on peut trouver une approximation, aussi précise que l'on veut, grâce à une double suite de nombres rationnels. Dès la deuxième étape, on obtient une approximation remarquable.

Déjà, dans l'antiquité, les architectes utilisaient, de cette même façon, 22/7 comme approximation de π pour mesurer le périmètre d'un cercle. Archimède montra même que l'on pouvait indéfiniment améliorer cette approximation en calculant les périmètres de polygones réguliers, d'un inscrit dans le cercle, l'autre exinscrit à ce cercle.

L'idée que certaines grandeurs issues des constructions géométriques ne peuvent qu'être approchées par des suites de nombres rationnels, mais échappent à toute détermination exacte constitua longtemps, pour les mathématiques, une lacune théorique, qui ne fut comblée que vers la fin du XIXème siècle.

L'existence de ces nombres irrationnels traduits le fait que toute suite de rationnels ne converge pas nécessairement, quand elle converge, vers un rationnel : on dit que Q n'est pas complet !

Il faut cependant distinguer deux catégorie d'irrationnels : ceux qui peuvent être décrits comme solution d'une équation à coefficients rationnels ; ce sont les nombres algébriques ; ceux qui ne sont solution d'aucune équation à coefficients irrationnels ; ce sont les nombres transcendants. Le nombre π en est un exemple parmi les plus célèbres.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est ainsi formé par tous les nombres rationnels.

Dans l'ensemble des réels ainsi constitué ; il reste cependant une opération impossible : le calcul de la racine carrée d'un nombre négatif.

Pour dépasser cette impossibilité, on est amené à construire des nombres, dits imaginaires, tels que le nombre, vérifiant par définition la relation $i^2 = -1$.

On étend donc ainsi les nombres réels en les plongeant dans un ensemble plus vaste dans lequel on peut extraire les racines de n'importe quel nombre positif ou négatif. L'ensemble ainsi obtenu est celui des nombres complexes. C'est là un procédé classique dans les constructions mathématiques. Mais chacune de ces extensions doit être justifiée et l'on doit vérifier, à chaque fois, que de nouvelles difficultés ne surgissent pas.

METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

La méthodologie est entendue ici comme étant du bon usage des méthodes et techniques qui orientent l'élaboration d'une recherche.

La population de notre étude est constituée des élèves de 6ème année des humanités scientifiques de quelques écoles de la commune MAKISO à Kisangani un échantillon de 247 élèves que compose notre étude est réparti dans six (06) écoles de la commune de MAKISO. Collège MAELE (50), IFCEP (50) Institut Scientifique de Kisangani (30), Institut du 14 octobre (40), Institut TUKUFU (32), Institut KALINDULA (45).

Pour l'analyse et interpréter les résultats de notre recherche nous avons eu à recourir à la méthode statistique pour la quantification des nos données dont la collecte a fait appel à la technique documentaire et à l'enquête par questionnaire. Ce questionnaire a comporté quatre (04) équations du second degré dans le corps de complexes dont les coefficients ont constitué les principales variables de notre étude. L »administration du questionnaire aux élèves a eu lieu au mois de janvier 2019 (à la veille des examens du premier semestre) ; la durée de passation était de 45 minutes.

L'analyse et l'interprétation des résultats ont porté sur le calcul du discriminant de l'équation, la résolution de l'équation binôme et la détermination des racines de l'équation complète considère comme variables dépendantes de notre recherche et les variables indépendantes sont les différentes opérations dans $\mathbb{C}$.

NOTION SUR LES EQUATIONS DU SECND DEGRE DANS $\mathbb{C}$

2.1. Pré-requis

- Equations de 1er et du 2ème degré dans le corps des réels ;
- Systèmes d'équations (symétriques) ;
- Produit remarquable du type $(x+y)^2$;
- Puissances de i
- Conjugué d'un nombre complexe non nul ;
- Module d'un nombre complexe non nul ;
- Addition, multiplication et division des nombres complexes.

2.2. Résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Les équations du second degré dans le corps des complexes sont les équations de la forme $az^2+bz+c=0$ où $a, b\ et\ c$ sont les coefficients réels ou complexe et z (une variable) en est l'inconnue.

Méthode de résolution

- Identifier les coefficients de l'équation complète $az^2 + bz + c = 0$;
- Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4.a.c$;
- Déterminer les racines carrées de discriminant Δ;
  Si le discriminant Δ est un nombre complexe,
- Calculer le module r de discriminant Δ ;
- Résoudre le système d'équations symétriques.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2 - y^2 = r \end{cases}$ (a est la partie réelle deΔ)

permettant de trouver les racines carrées de Δ qui sont $\pm\left(\sqrt{\frac{a+r}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+r}{2}}\right)$

N.B : Pour le signe précédant, on prend le signe positif (+) si la partie imaginaire b de Δ est positif, on prend le signe négatif si b est négatif.

- considérer une racine carrée de Δ pour déterminer les racines de l'équation complète ;
- Ecrire l'ensemble-solution de l'équation complète

3. PRESENTATION, ANALYSE ET INTERPRETATION DES RESULTATS

Pour évaluer les connaissances des élèves sur les équations du second degré dans le corps des nombres complexes, nous avons administré un questionnaire à 247 sujets reparties dans six (06) écoles de la commune de MAKISO à Kisangani.

L'objectif principal est de vérifier si les élèves de 6ème année des humanités scientifiques étaient capables de résoudre les équations du second degré dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, comme souligné dans les pages précédentes, les étapes (ici considérées comme les variables de résolution sont les suivantes :

- La détermination des coefficients de l'équation ;
- Le calcul de discriminant
- La détermination des racines de l'équation complète.

PRESENTATION ET ANALYSE DES RESULTATS

Equation 1 : $z^2 + 2iz - 1 - 2i = 0$

(1) 109 élèves sur 247 (soit 44%) ont répondu correctement ; ces élèves maitrisent toutes étapes de la résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$
(2) 106 élèves (soit 43%) se sont trompés dans telle ou telle étape de la résolution. Voici quelques cas :
    * $\Delta = b^2 - 4.a.c$

$$= (2i)^2 - 4.1.(-1 - 2i)$$
$$= 4i^2 + 4 + 8i$$
$$= 8i$$

$\sqrt{\Delta}= \sqrt{8i} = \sqrt{4x2i} = \sqrt{4}\ x\ \sqrt{2i} = 2\sqrt{2i}$ (17% d'élèves).

Ces élèves considèrent $8i$ comme un réel en lieu et place d'un imaginaire pur.

* Un autre cas

$\Delta= 8i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64} = 8$ (module de $\Delta= 8i$)

$$\sqrt{\Delta}= \sqrt{\frac{8+0}{2}} + i\sqrt{\frac{8-0}{2}} = \pm(2 + 2i)$$

Ces élèves réussissent trois premières étapes de la résolution de l'équation mais ils se trompent à la 3e étape sur les racines de l'équation binôme en les divisant par 2. Ce résultat a conduit aux racines incorrectes de l'équation complète.

(3) 32 élèves sur 247 (soit 13%) ont carrément échoué : les uns ne maitrisent pas les puissances de i et les autres suppriment mal les parenthèses précédées de signe négatif.

Equation 2 : $\boldsymbol{z^2 + (1 + 4i)z - (5 - i) = 0}$

(1) 104 élèves sur 247 (soit 42%) ont répondu correctement à toutes les étapes de la résolution de l'équation.
(2) 116 élèves (soit 47%) ne maitrisent pas au moins l'une des étapes de la résolution. En voici quelques exemples de résolution.

* $a = 1,\ b = 1 + 4i,\ c = 5 - i$

$\Delta= b^2 - 4.a.c$

$$= (1 + 4i)^2 - 4.1.(-5 - i)$$

$$= 1 + 8i + 16i^2 + 20 + 4i$$

$$= 1 + 8i - 16 + 20 + 4i$$

$\Delta= 5 + 12i$

$z_1 = \frac{-1-4i+\sqrt{5+12i}}{2}$ Et $z_2 = \frac{-1-4i-\sqrt{5+12i}}{2}$ (23% d'élèves)

Ce groupe d'élèves ignorent complètement la résolution de l'équation binôme $\Delta = 5 + 12i$

* Un autre exemple :

$$\Delta = (1+4i)^2 - 4.1.(-5-i)$$

$$= 1 + 8i - 16 + 20 + 4i$$

$$= 5 + 12i$$

$|z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ (module de $= 5 + 12i$)

$\sqrt{\Delta} = \left(\sqrt{\frac{13-5}{2}} + i\sqrt{\frac{13+5}{2}}\right)$ (3% d'élèves)

La résolution de l'équation binôme pose problème à ces élèves qui inversent le procédé de calcul des racines carrées de Δ en faisant

$$\sqrt{\Delta} = \left(\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}} + i\sqrt{\frac{a+|z|}{2}}\right)$$

En lieu et place de $\sqrt{\Delta} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+|z|}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}}\right)$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} + i\sqrt{\frac{13-5}{2}}\right)$$

$$= \pm(3+2i)$$

(3) 27 élèves sur 247 (soit 11%) ont fait faux calcul dès le début

Exemple : $\Delta = (1+4i)^2 - 4.(1).(-5-i)$

$$= 1 + 8i - 16 - 4 + 20 + 4i$$

$= 1 + 12i$ (0,7% d'élèves)

Ces élèves ne maitrisent pas la suppression des parenthèses.

Un autre exemple : $\Delta = (1+4i)^2 - 4.(-5-i)$

$$= 1^2 + 2.4i + 4i^2 + 20 + 4i$$

$$= 1 + 8i - 16 - 4 + 20 + 4i$$

$= 17 + 12i$ (4,8% d'élèves).

Ces élèves font faux calcul à la 2ème ligne en faisant le produit remarquable $(1+4i)^2 = i^2 + 2.4i + 4i^2$ en lieu et place de $1 + 2.4i + (4i)^2 = 1 + 8i - 16$

Equation 3 : $\boldsymbol{iz^2 - (1-5i)z + 6i = 2}$

(1) 44 élèves sur 247 (soit 18%) ont bien répondu à cette équation en respectant toutes les étapes de résolution.
(2) 156 élèves (soit 63%) ont fait faux pas par çi et par là voici quelques exemples de résolution

* $iz^2 - (1-5i)z + 6i = 2$

$iz^2 - (1-5i)z + 6i - 2 = 0$
$a = i \quad ; \quad b = -(1-5i)\,;\ c = 6i - 2$
$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$= (-1+5i)^2 - 4i.(6i-2)$
$= 1 - 10i - 25 - 24i^2 + 8i$
$= 1 - 10i - 25 + 24 + 8i$
$= -2i$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+4} = 2$

$$\sqrt{\Delta} = \pm\left(\sqrt{\frac{0+2}{2}} + i\sqrt{\frac{0+2}{2}}\right)$$

$= \pm(1+i)$ (37% d'élèves)

Le raisonnement de ces élèves est correct jusqu'au calcul de module de -2i qui est 2. Mais ils font faux (erreur et/ou faute) pour le calcul des racines carrées de $\Delta = -2i$ où la partie imaginaire est négative, soit -2.

Ces élèves procèdent comme suit $\sqrt{\Delta} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+|z|}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}}\right)$ comme si la partie imaginaire était positive en lieu et place de $\sqrt{\Delta} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+|z|}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}}\right)$

* un autre exemple

$iz^2 - (1-5i)z - 2 + 6i = 0$

$\Delta = (-1+5i)^2 - 4i(-2+6i)$

$= 1 - 10i + 25i^2 + 8i - 24i^2$

$= 1 - 10i - 25 + 8i + 24$

$= -2i$

Module de $\Delta = -2i$ est $\sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2$

Racines carrées de $\Delta = -2i$

$$\sqrt{\Delta} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + |z|}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + |z|}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{0 + 2}{2}} - i\sqrt{\frac{-0 + 2}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{2}{2}} - i\sqrt{\frac{2}{2}}\right)$$

$$= \pm(1 - i)$$

$$z_1, z_2 \; \frac{-(1-5i)\pm(1-i)}{2i} = \frac{-1+5i\pm(1-i)}{2i} \; \begin{cases} \frac{-1+5i+1-i}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2 \\ \frac{-1+5i-1+i}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} \end{cases}$$

$z_1 = 2 \; et \; z_2 = -\frac{1}{2} + 3$ (10% d'élèves).

Très bon raisonnement jusqu'à la recherche des racines carrées d'un nombre complexe. Ces élèves se trompent sur la détermination des racines de l'équation complète où

$z_1, z_2 \; \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-[-(1-5i)]\pm(1-i)}{2i} = \frac{1-5i\pm(1-i)}{2i}$ et non $\frac{-1+5i\pm(1-i)}{2i}$; ici le signe de coefficient b de l'équation complète doit changer.

$* \; iz^2 - (1 - 5i)z + 6i = 2$

$iz^2 - (1 - 5i)z + 6i = 2$

$a = i \;\; ; \; b = -(1 - 5i) \; ; \;\; c = (6i - 2)$

$\Delta = \; (-1 + 5i)^2 - 4i.(6i - 2)$

$\Delta = (-1)^2 + 2(-1).5i + (5i)^2 - 24i^2 + 8i$

$= \ 1 - 10i + 25i^2 - 24i^2 + 8i$

$= 1 - 10i + 1.\,i^2 + 8i$

$= 1 - 10i - 1 + 8i$

$= -2i$

$$\sqrt{\Delta} = \pm\left(\sqrt{\frac{0+2}{2}} - i\sqrt{\frac{0+2}{2}}\right)$$

$= \pm(1 - i)$

$$z_1, z_2 = \frac{1-5i \pm (1-i)}{2i}$$

$$z_1 : \frac{1-5i+1-i}{2i} = \frac{2-6i}{2i} = \frac{(2-6i)(-2i)}{(2i)^2}$$

$$z_2 : \frac{1-5i-1+i}{2i} = \frac{-4i}{2i} = -2$$

$$z_1 = \frac{-4i + 12i^2}{4i^2} = \frac{-4i - 12}{-4} = \frac{-4i}{-4} - \frac{12}{4} = i - 3 \quad ; \ z_2 = -2$$

$s = \{i - 3;\ -2\}$ (10% d'élèves).

Toutes les étapes sont faites par ces élèves, mais pour le calcul des racines de l'équation complète, ces derniers se trompent pour z_1 où le dénominateur est multiplié par lui-même (ce qui est faux). Ici le dénominateur doit être multiplié par son conjugué, soit -2i comme fait au numérateur. Ces élèves ne maitrisent pas comment rendre le dénominateur réel.

(3) 47 élèves sur 247 (soit 19%) ont fait faux. Voici quelques exemples de résolution :

* $iz^2 - (1 - 5i)z + 6i = 2$

$a = i \quad ; \ b = -1 + 5i \quad ; \ c = 6i$ (4% d'élèves)

$\Delta = \ (-1 + 5i)^2 - 4.\,i.\,(6i)$

Ces élèves se trompent pour les coefficients de l'équation ; $c = 6i$ (incorrect) ; ces élèves ne maitrisent pas le principe de l'équivalence, selon lequel il fallait ajouter l'opposé de 2 aux membres de l'équation donnée pour obtenir une équation de la forme $iz^2 - (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$ où $c = 6i - 2$

* $iz^2 - (1 - 5i)z + 6i = 2$

$iz^2 - (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

$a = i \quad ; \ b = -1 + 5i \quad ; \ c = 2 - 6i$ (7% d'élèves)

Le coefficient $c = 2 - 6i$ déterminé par ces élèves est incorrect pour ces derniers la forme générale de l'équation du second degré dans c'est $az^2 + bz = c$, ce qui est faux. Ces élèves devrait faire passer 2 au premier membre tout en changeant son signe ajouter l'opposé de 2 aux deux membres de l'égalité.

Equation 4 : $\boldsymbol{-(4 + 2i)z^2 + (7 - i)z + (1 + 3i) = 0}$

(1) 51 élèves sur 247 (soit 17%) ont correctement répondu
(2) 106 élèves (soit 43%) se sont trompés à au moins une des étapes de la résolution. En voici quelques exemples :

* coefficient $a = -4a - 2i$; $b = 7 - i$; $c = 1 + 3i$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$= (7 - i)^2 - 4.(-4 - 2i).(1 + 3i)$

$= 49 - 14i - 1 + 16 + 48i + 8i - 24$

$\Delta = 40 + 42i$

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\rangle \frac{-7+i\pm\sqrt{40+42i}}{2(-4-2i)} = \frac{-7+i\pm\sqrt{40+42i}}{-8-4i} = \frac{13-9i\pm(2-i)\sqrt{40+42i}}{20}$$ (8% d'élèves)

Les sujets ont bien précisé les coefficients de l'équation et ont calculé le discriminant$\Delta = 40 + 42i$. Le point faible de ces élèves est l'ignorance totale de la résolution de l'équation binôme. Autrement dit ils sont incapables de déterminer les racines carrées de l'équation binôme$\Delta = 40 + 42i$. Ce qui a compliqué la détermination de racine de l'équation complète en cherchant à rendre réel le dénominateur.

* autre exemple $-(4 + 2i)z^2 + (7 - i)z + (1 + 3i) = 0$

$\Delta = (7 - i)^2 - 4(-4 - 2i).(1 + 3i)$

$= 49 - 14i - 1 + 16 + 48i + 8i - 24$

$= 40 + 42i$

$\Delta = 40 + 42i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\begin{cases} 40 = x^2 - y^2 \\ 42 = 2xy \end{cases}$$

$$40 = \left(\frac{21}{y}\right)^2 - y^2$$

$40 = \frac{441}{y^2} - y^2 \Rightarrow 40y^2 = 441 - y^4$

Posons $y^2 = m$

$$m^2 + 40m - 441 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 58$$

$$m_1 = \frac{-40+58}{2} = 9 \quad et \quad m_2 = \frac{-40-58}{2} = -49$$

$$m = 9 \quad y = \pm 3 \ ; \ x = \frac{21}{-3} = -7 \ ; \ x = \frac{21}{3} = 7$$

$$z_1 = 7 + 3i \quad ; \ z_2 = -7 - 3i$$

$$z_1 = \frac{-(7-i)+7+3i}{2} = \frac{-7+i+7+3i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

$$z_2 = \frac{-(7-i)-(7+3i)}{2} = \frac{-7+i-7-3i}{2} = \frac{-14-2i}{2} = -7-i$$

$s = \{2i, -7-i\}$ (2,7% d'élèves)

Les deux sujets qui ont appliqué le procédé classique de la résolution de l'équation binôme en respectant toutes les étapes de la résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, se sont trompés à la fin pour la recherche des racines de l'équation complète où $z_{1,2} = \frac{-b+w}{2a}$ où w est une des racines de l'équation binôme. Pour ces élèves $a = 1$ en lieu et place de – $(4 + 2i)$.

* un autre exemple : $-(4+2i)z^2 - (7-i)z + (1-3i) = 0$

$$\Delta = (7-i)^2 - 4(-4-2i)(1+3i)$$

$$= 49 - 14i - 1 + (16+8i)(1+3i)$$

$$= 49 - 14i - 1 + 16 + 48i + 8i - 24$$

$$= 40 + 42i$$

$$z^2 = a + bi$$

$$(x+iy)^2 = 40 + 42i$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 40 + 42i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ 2xy = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 40 & (1) \\ xy = 40 \ (2) \Rightarrow y = \dfrac{21}{x} & (3) \end{cases}$$

Remplaçons $y = \frac{21}{x}$ par sa valeur dans (1)

$$x^2 - \left(\frac{21}{x}\right)^2 = 40$$

$$x^2 - \frac{441}{x^2} = 40 \Rightarrow x^4 - 441 = 40x^2$$

$$x^4 - 40x^2 - 441 = 0$$

Posons $x^2 = t$

$$t^2 - 40t - 441 = 0$$

$$\Delta' = (-20)^2 + 441$$

$$= 400 + 441$$

$$= 841$$

$$\sqrt{\Delta'} = 29$$

$t_1 = \frac{20+29}{1} = 49 \ \ et \ \ t_2 = \frac{20-29}{2} = -9$ à rejeter

$$x^2 = t_1$$

$$x^2 = 49 \Rightarrow x^2 = \pm 7$$

$$y = \frac{21}{x} = \frac{21}{\pm 7} = \pm 3$$

$$z_1 = 7 + 3i \quad et \quad z_2 = 7 - 3i$$

$s = \{7 + 3i \,; 7 - 3i\}$ (18% d'élèves)

Ces élèves maitrisent le calcul de déterminant et la résolution de l'équation binôme. Par contre, il s'arrêtent-en mi-chemin en considérant les racines carrées de discriminant qui est un nombre complexe comme les racines de l'équation complète.

(3) 90 élèves sur 247 (soit 40%) ont totalement échoué. En voici quelques exemples :

$* -(4 + 2i)z^2 + (7 - i)z + (1 + 3i) = 0$

$$\Delta = (7 - i)^2 - 4[(-4 - 2i)(1 + 3i)]$$

$= 49 - 14i + 1 - 4(-4 - 12i - 2i + 6)$

$= 49 - 14i + 1 + 16 + 48i + 8i - 24$

$= 42 + 42i$

$= 1 + i$ (17% d'élèves)

Ces élèves ont fait faux sur le produit remarquable $(7 - i)^2$. Pour ces derniers $(7 - i)^2 = 7^2 - 2.7i - (i)^2$

$= \ 49 - 14i — (-1)$

$= 49 - 14i + 1$

Ce qui est incorrect car $(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$ et non $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

* autre exemple

$-(4 + 2i)z^2 + (7 - i)z + (1 + 3i) = 0$

$[-(4 + 2i)z^2 + (7 - i)z] + 1 + 3i = 0$

$[-(4 + 2i)z^2 + (7 - i)z] = -1 - 3i$

$z[-(4 + 2i)z + (7 - i)] = -1 - 3i$

$z_1 = -1 - 3i$, $(-4 - 2i)z + 7 - i = -1 - 3i$

$(-4 - 2i)z = -1 - 3i - 7 + i$

$(-4 - 2i)z = -8 - 2i$

$$z = \frac{-8 - 2i}{-4 - 2i} = \frac{(-8 - 2i)(-4 + 2i)}{(-4 - 2i)(-4 + 2i)} = \frac{36 - 8i}{16 + 4} = \frac{36}{20} - \frac{8i}{20} = \frac{9}{5} - \frac{2i}{5}$$

$z_2 = \frac{9}{5} - \frac{2i}{5}$ (0,3% d'élèves)

Ces élèves ignorent complètement la résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Ils résolvent cette équation comme si elle était une équation réciproque en cherchant à décomposer l'équation donnée en soit disant une équation produit.

Interprétation des résultats

Les différentes analyses faites ont conduit aux constats suivants :

- Les élèves ne maitrisent pas les coefficients de l'équation $az^2 + bz + c = 0$
- Certains élèves ne maitrisent pas la forme générale d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$;
- Certains élèves éprouvent des difficultés sur les produits remarquables ;
- Certains élèves ignorent totalement et/ou ne maitrisent pas le procédé de calcul des racines carrées de l'équation $z^2 = a + ib$, appelée équation binôme ;
- Certains élèves ne maitrisent pas le carré de i, soit $i^2 = -1$, ce qui ce conduit au mauvais calcul de déterminant ;
- Certains élèves opèrent dans le corps des réels pour calculer les racines carrées d'un imaginaire pur et/ou d'un nombre complexe ;
- Certains élèves considèrent les racines de l'équation binôme comme celles de l'équation complète.

Bref, les élèves éprouvent les difficultés pour la résolution d'une équation du second degré dans le corps des nombres complexes.

TABLEAU SYNTHESE DES RESULTATS

	REUSSITE		**ECHEC**		**TYPES D'ERREURS COMMISES**												**MAUVAIS CHOIX DE CALCUL**	
	f	**%**	**f**	**%**	Coefficients de $az^2 + bz + c = 0$		Produit remarquable		Calcule de discriminant		Racines carrés de $\Delta = a + ib$		Racines de $az^2 + bz + c = 0$		Total d'erreurs			
					f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Equation 1	109	44	138	55,8	12	4,8	5	2	34	13,7	52	21	7	2,8	110	44,5	28	11,3
Equation 2	103	42	144	58,2	7	2,8	7	2,8	42	17	23	9,3	10	4	89	36	55	22,2
Equation 3	44	18	203	82,1	19	7,7	15	6	39	15,7	69	27,9	27	10,9	169	68,4	34	13,7
Equation 4	42	17	205	82,9	34	13,7	28	11,3	32	12,9	55	22,2	35	14,1	184	74,4	21	8,5
Total	298	121	690	279	72	29	55	22,1	147	59,3	199	80,4	79	31,8	552	223,3	138	55,7
Moyenne d'élèves	74,5	30,2	172,5	69,8	18	7,8	13,7	5,5	3,7	14,8	49,7	20	19,7	8	138	55,8	34,9	13,9

COMMENTAIRE

Le Tableau ci-dessus révèle que la moyenne de réussite et d'échec de l'ensemble de 4 questions que compose notre questionnaire est respectivement de 74,5 élèves sur 247 (soit 30,25%) et 172,5 élèves sur 247 (soit 69,75%).

En ce qui concerne les difficultés liées à la résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$, 138 élèves sur 172,5 élèves (soit 80%) présent certaines lacunes sur les équations du degré dans $\mathbb{C}$ et 34,5 élèves sur 172,5 (soit 20%) ignorent totalement la résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Quant aux erreurs commises par les élèves sur la résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$, 18 élèves sur 138 (soit 13%) ne maitrisent pas les coefficients $a, b\ et\ c$ de l'équation$az^2 + bz + c = 0$, 13,7 élèves sur 138 (soit 9,9%) présentent des insuffisances sur le produit remarquable (du type $(x + iy)^2$ où $(i^2 = 1)$, 36,7 élèves sur 138 (soit 25,6%) ne maitrisent pas.

Le calcul de discriminant $\Delta = b^2 - 4.a.c$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$, 49,7 élèves sur 138 (soit 36%) ne maitrisent pas la résolution des équations binôme $z^2 = a + ib$, autrement dit ces élèves ne maitrisent pas le procédé de calcul des racines carrées d'un nombre complexe $\Delta = a + ib$, 19,7 élèves sur 138 (soit 14,3%) n'arrivent pas à trouver les racines de l'équation complète $az^2 + bz + c = 0$.

CONCLUSION

Analyse des difficultés liées à la résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$ (le corps des nombres complexes) par les élèves de 6ème année des humanités scientifiques (cas des écoles de la commune MAKISO) telle est la thématique de notre étude, une contribution à la didactique des mathématique.

La problématique de cette étude s'est axée autour de la question principale suivante : les élèves de 6ème année des humanités scientifiques sont-ils capables de résoudre les équations du second degré dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ? de cette question principale, il s'est dégagé les questions spécifiques suivantes :

- Les élèves de 6ème année des humanités scientifiques sont-ils capables de résoudre une équation binôme dans $\mathbb{C}$?
  Autrement dit, ces élèves sont ils capables de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe ?
- Les élèves de 6ème des humanités scientifiques sont-ils capables de trouver les racines d'une équation complète du second degré dans $\mathbb{C}$?

Subsidiairement à notre problématique, cette recherche s'est assignée comme objectif principal vérifié si les élèves de 6ème année des humanités scientifiques étaient capables de résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Les objectifs spécifiques assignés sont les suivants :

- Vérifier si les élèves de 6ème année des humanités scientifiques étaient capables de résoudre une équation binôme dans $\mathbb{C}$, autrement dit vérifier si les élèves de 6ème scientifique étaient capables de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe ;
- Vérifier si les élèves de 6ème année des humanités scientifiques étaient capables de trouver les racines d'une équation complète du second degré dans $\mathbb{C}$.

Pour tenter de répondre aux questions posées à la problématique de notre étude, nous avons émis l'hypothèse principale suivante : les élèves de 6ème année des humanités scientifiques seraient capables de résoudre les équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Les hypothèses spécifiques sont formulées comme suit :

- Les élèves de 6ème année des humanités scientifiques seraient capables de résoudre une équation binôme dans $\mathbb{C}$; autrement dit ces élèves seraient capables de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe ;
- Les élèves de 6ème année des humanités scientifiques seraient capables de trouver les racines d'une équation complète du second degré dans $\mathbb{C}$.

Pour vérifier nos hypothèses et atteindre nos objectifs, nous avons mené une enquête auprès de 247 élèves repartis dans six (06) écoles de la commune de Makiso à Kisangani, à qui nous avons administré un questionnaire composé de quatre (04) équations du second degré dans le corps des nombres complexes.

L'analyse de contenu des réponses fournis par les élèves a porté sur les variables suivantes : coefficients de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, produit remarquable du type $(x + iy)^2$, discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, racines carrés de $\Delta = a + ib$ et racines de l'équation complète de $az^2 + bz + c = 0$

De l'analyse des résultats de notre enquête, il s'est dégagé que la moyenne de réussite est de 74,5 élèves sur 247 (soit 30,2%) et celle de l'échec est de 172,5 élèves sur 247 (soit 69,8%). Cette moyenne d'échec contredit notre hypothèse principale qui stipule que les élèves de 6ème année des humanités scientifiques seraient capables de résoudre les équations du second degré dans $\mathbb{C}$; donc ces élèves seraient incapables de résoudre les équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Cette difficulté de résoudre les équations du second degré dans $\mathbb{C}$ serait tributaire de plusieurs facteurs notamment la non maitrise des coefficients de $az^2 + bz + c = 0$. 18 élèves sur 138 (soit 13%), la non maitrise de produit remarquable de type$(a + ib)^2$ avec 13,7 élèves sur 138 (soit 9,9%), le mauvais calcul de discriminant 36,7 élèves sur 138 (soit 25,6%) ; la non maitrise de procédé de résolution de l'équation binôme $\Delta = a + ib$ avec 49,7 élèves sur 138 (soit 36%) qui infirme la première hypothèse spécifique selon laquelle les élèves de 6ème année des humanités scientifiques seraient capables de résoudre une équation binôme dans $\mathbb{C}$; donc ces élèves seraient incapables de résoudre une équation binôme dans $\mathbb{C}$; autrement dit ces élèves seraient incapables de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe, la non maitrise de la relation conduisant à la recherche des racines de l'équation complète $az^2 + bz + c = 0$ avec 19,7 élèves sur 138 (soit 14,3%) ce qui infirme la deuxième hypothèse spécifique qui stipule que les élèves de 6ème année des humanités scientifiques seraient capables de trouver les racines de l'équation complète $az^2 + bz + c = 0$, donc ces élèves seraient incapables de trouver les racines de $az^2 + bz + c = 0$.

Tous ces résultats montrent que les objectifs assignés par notre recherche sont atteints et toutes les hypothèses formulées au départ sont infirmés. Par conséquent nous pouvons dire que les élèves de 6ème année des humanités scientifiques éprouvent des difficultés pour résoudre les équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Tout compte fait nous n'avons aucune prétention de dégager les difficultés liées à la résolution des équations du second degré dans le corps des complexes.

Néanmoins, les quelques facteurs soulevés dans la présente étude pourront permettre aux autres chercheurs d'élargir le champ d'étude en abordant une « Analyse des difficultés liées à la résolution des équations du 3ème degré dans $\mathbb{C}$ ».

De tout ce qui précède, pour résoudre les équations du second degré dans $\mathbb{C}$, nous recommandons aux élèves de 6ème des humanités scientifiques la maitrise de (s) :

- Coefficient a, b, c de l'équation $az^2 + bz + c = 0$;
- La relation permettant de calculer le discriminant ;
- Binôme de Newton $(a \pm b)^n$ avec $n = 2$;
- Puissances de i en général et de $i^2 = -1$ en particulier ;
- Principe de la suppression des parenthèses précède du signe négatif ;
- Procédé de résolution de l'équation binôme $z^2 = a + ib$;
- La résolution de systèmes (symétriques) d'équations à 2 variables ;
- Différentes opérations dans $\mathbb{C}$ (addition, soustraction, multiplication et division).

Aux enseignants, nous demandons de considérer l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme un nouvel ensemble dans lequel les élèves doivent opérer et par conséquent de multiplier les exercices (en classe et/ ou à domicile) sur les équations du second degré dans $\mathbb{C}$ pour un meilleur apprentissage.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

OUVRAGES

AUDIGIER. M.N & cie (1983), *Mathématique : Situations-Exercices Problèmes. Activités terminales, collection Di mathème, édition Didier*, *Paris*

BATODISA VUMA Grégoire & all (2005), *Maitriser les Math 6, 6ème scientifique et techniques éditions Loyola, Kinshasa.*

CREM (198 1), Math Algèbre / analyse 6ème. Edition ECA, Kinshasa.

LORENT. R & S (1971), *Algèbre 2B, édition DE BOECK, Bruxelles*

SCHONS N.J & GRASS. R (1961), *Exercices d'Algèbre.* Tome 2 La procure Namur, Bruxelles.

VAN Noyen. J (1979), Algèbre avec exercices à l'usage des candidats à l'Exetat, C.R.P, Kinshasa.

MEMOIRES ET PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

MARIO MAIR Colin (2012), Nombres complexes et Isométries de IR^2, In Bulletin, AMQ, vol LII, 5 éditions QUEBEC

MATALA Y UMA (20 19), Analyse de difficultés liées à la résolution de systèmes d'équations du I CI degré à deux variables dans C, mémoire de licence ISPKISANGANI, Inédit.

OHOMA KONGA (2007), *Analyse des difficultés rencontrées par les élèves de 6ème des humanités scientifiques sur les opérations dans le corps des nombres complexes : cas de la ville de Kisangani*, Mémoire de licence, Inédit, ISP KISANGANI.

WUNGU EMBONDO (2015), Apprentissage de l'enseignement des écritures complexes des isoméries usuelles, mémoires de licence, Inédit, ISP KISANGANI.

REVUES

SERNAFOR (1985), l'ensemble des nombres (premier partie), 6ème Math, Bio, C, L Technique industrielle Kinshasa.

DICTIONNAIRES

Dictionnaire universel (2008), revue et corrigé, 5ème édition, Paris.

STALLA B. (2), dictionnaire des mathématiques élémentaires, Dunod, Paris

THEMA encyclopédie (2000), sciences et techniques, édition Larousse, Paris.